



TITLE:

# グラフによる多様体の表現(位相幾何学的グラフ理論)

AUTHOR(S):

津久井, 康之

---

CITATION:

津久井, 康之. グラフによる多様体の表現(位相幾何学的グラフ理論). 数理解析研究所講究録 1989, 686: 96-117

ISSUE DATE:

1989-03

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/101231>

RIGHT:

# グラフによる多様体の表現

相模工業大学 津久井 康之

(Yasuyuki Tsukui)

## § 0.

グラフを用いて多様体を表現することは様々な方法で行なわれている。その中でグラフが直接多様体を表現するいくつかの例を簡単に紹介し、その中の1つである報告者の提唱する「Frame の理論」を2次元を例に、3次元を横目で見ながら、グラフの側面を強調して考え方の大要を報告する。

## § 1. DS-diagram

2次元円板  $D^2$  の境界を図1のように Cell 分割してラベルを付ける。そのラベルに沿って張り合わせると閉曲面（2次元多様体）を得る。

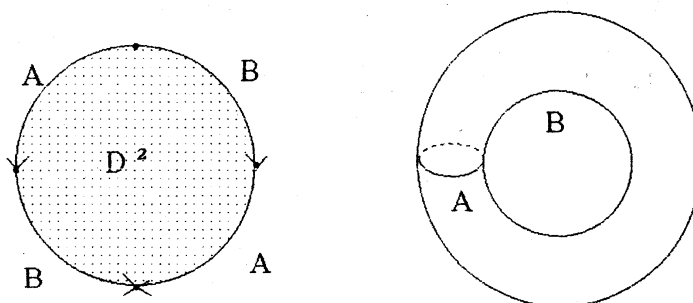


図 1

同様のことを3次元で考えてみよう。3次元球体(3-ball)の境界である2次元球面に connected 3-regular planar oriented graph  $G=(V,E)$  を置き、それらの頂点、辺(弧)、面にラベルを付ける。ただし4点、3辺、2面がそれぞれ同じラベルを持つこととする。この3-ballの境界での同じラベルのものの同一視が3次元閉多様体を一意に定めることはすでに Dehn-Seifert によって知られていたが、この観点からの3次元多様体の研究は、この数年、日本で本格的になされているものである。図2は  $S^3$  を表現する DS-diagram である。

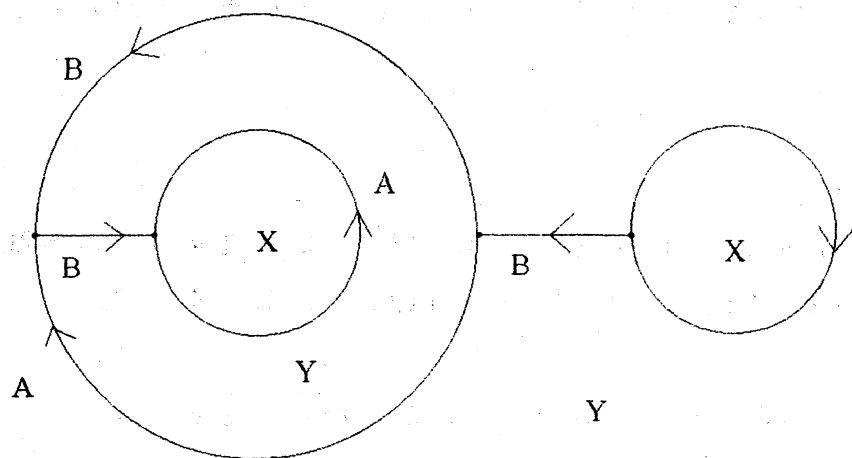


図2

## § 2. Crystallization

$G=(V,E)$  を loop を持たない  $(n+1)$ -regular  $(n+1)$ -edge-coloured graph,  $c:E \rightarrow \{1,2,\dots,n+1\}$  をその edge-colouring とする。いま  $G$  において colour  $i$  をもつある辺の端点が  $A$  と  $B$  であるとする。

$n$  次元単体を頂点の個数だけ用意して、それら単体の頂点に  $1$  から  $n+1$  の番号を与えて置く。2つの  $n$  次元単体  $A, B$  を colour  $i$  の頂点の反対面の  $(n-1)$  単体で、頂点の番号を合わせて、同一視する [図3]。

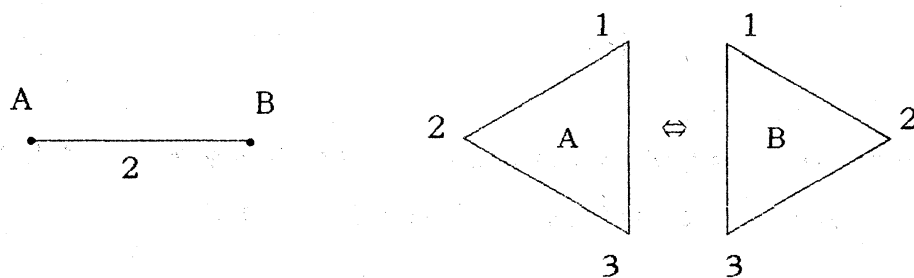


図3

これを  $G$  のすべての辺とその端点に対して行なうと  $n$  次元多面体  $P(G,c)$  を得る。  $P(G,c)$  は一般には多様体にならないが、すべての  $n$  次元閉多様体  $M^n$  に対して、  $P(G,c)=M^n$  となるグラフ  $G$  とその edge-colouring  $c$  が存在する。この  $G$  を  $M$  の cristallization という。一般には  $P(G,c)$  が多様体になるかどうかは  $G$  の構造からは判定できていない。

Crystallization の研究はこの十年ほど Italy を中心に組合せ的に研究され

てきて、曲面上のグラフ - Combinatorial Map の研究者も加わって発展してきている。

### § 3. Frame

$X$  が Polyhedron または 集合のとき、 $\#X$  で  $X$  の連結成分の個数または濃度を表わし、 $|X| = \cup \{p: p \in X\}$  は underlying space を示す。

**Definition 1.**  $G=(V,E,f)$  が generalized graph であるとは、

$\Leftrightarrow$  a)  $V, E$  は finite sets で、 $V \cap E = \emptyset$

b)  $f: E \rightarrow \{X: X \subset V\}$  map, ただし  $\forall e \in E$  に対して  $0 \leq \#f(e) \leq 2$

$E \ni e$  が hoop  $\Leftrightarrow f(e) = \emptyset$

loop  $\Leftrightarrow = \{v\}$

pure edge  $\Leftrightarrow = \{u, v \mid u \neq v, u, v \in V\}$

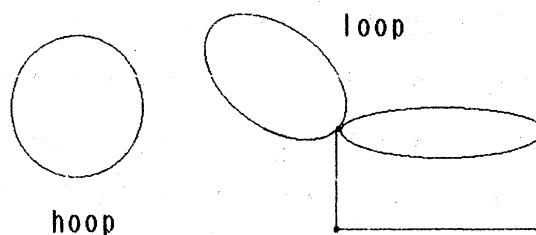


図 4

この後は、すべて loop 無しの generalized graph のみを考えることとする。  
また、 $G=(V,E,f)$  のかわりに  $G=(V,E)$  と記すこととする。

**Definition 2.**  $c: G \rightarrow C_k = \{1, 2, \dots, k\}$  が generalized graph  $G=(V,E,f)$  の edge-colouring であるとは map  $c: E \rightarrow C_k$  が  $e \sim e'$  (edge-adjacent) ならば  $c(e) \neq c(e')$  を満たす時をいう。

**Definition 3.**

$\bar{R}(k) = \{G: G \text{ は } k\text{-regular } k\text{-edge-colourable generalized graph}\}$

$\bar{R}(k) \ni G, c: E(G) \rightarrow C_k$  を edge-colouring とする。  $X \subset C_k$  について、

$$E_x = c^{-1}(X), \quad G_x = (V, E_x, f | E_x), \quad E_x^- = E - c^{-1}(X), \quad G_x^- = (V, E_x^-, f | E_x^-)$$

と記す。特に、

$X = \{i\}$  のとき  $G_x$  を  $G_i$ ,  $G_x^-$  を  $G_i^-$

$X = \{i, j\}$  のとき  $G_x$  を  $G_{ij}$ ,  $G_x^-$  を  $G_{ij}^-$  と記す。

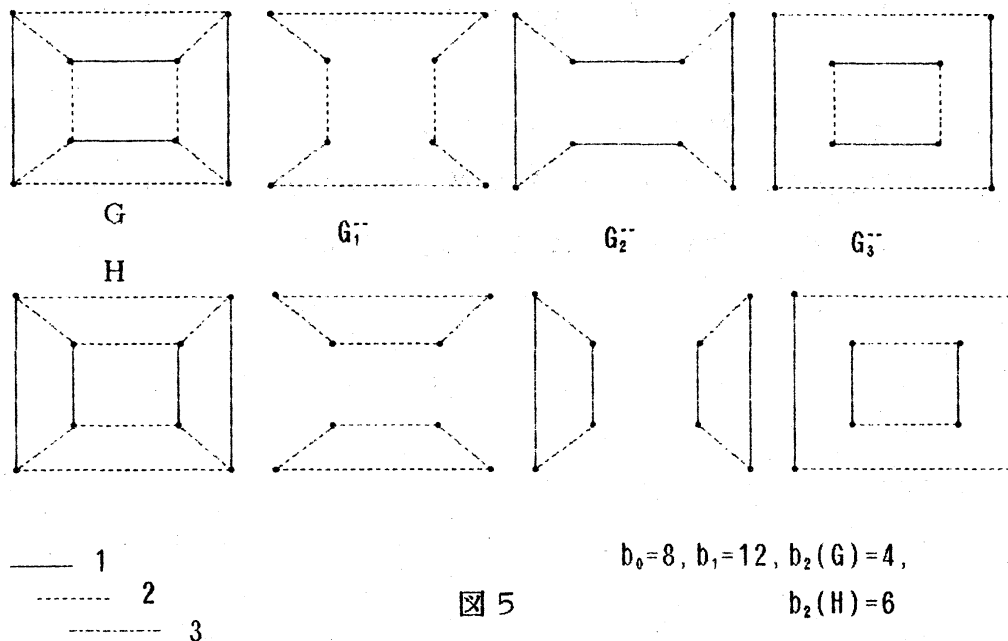


図 5

**Definition 4.**  $\bar{R}(k) \ni G, c: E(G) \rightarrow C_k$  を edge-colouring とするとき、

$$b_i = \sum \{ \#G_x : \#X=i \}.$$

$b_0 = \#V(G)$  (even),  $b_1 = \#E(G)$ ,  $b_2 =$  2色で出来る cycles の総数、

$b_k = \#G$  (=成分数)

[註: hoop は  $b_2$  の count で  $(k-1) =_{k-1} C_{2-1}$  回数えられる。

[  $\bar{R}(4) \ni G = (\phi, \{e\})$  に対して、 $b_2(G)=3$ ,  $b_3(G)=3 = {}_3C_2$ ,  $b_4(G)=1 = {}_3C_3$

**Definition 5.**  $\bar{R}(k) \ni G, c: E(G) \rightarrow C_k$  を edge-colouring とするとき、

$$P^0(G, c) = |V(G)|, \quad P^1(G, c) = |G| = |V(G)| \cup |E(G)|,$$

$P^2(G, c) = |G|$  に  $b_2$  個の二色cycles を貼付けて得られる 2-polyhedron.

もし、 $P^i(G, c)$  が 定義され ( $i > 1$ )、

$\forall X \subset C_k (\#X=i) \quad \forall H: G_x \text{ の成分 について } P^i(H, c | H) = S^i(i\text{-sphere})$  の時、

$P^{i+1}(G, c) = P^i(G, c)$  に  $b_i$  個の  $(i+1)$ -ball を  $P^i(H, c|H)$  に沿って貼りつけて得られる Polyhedron.

$W(G, c) = P(G, c) = P^{k-1}(G, c)$ :  $(k-1)$ -manifold.

[  $G = (\phi, \{e\}) \in \bar{R}(4)$  に対して、 $P^0(G, c) = \phi$ ,  $P^1(G, c) = \{e\}$ ,

[  $P^2(G, c) \equiv \Sigma \Sigma \{p^1, p^2, p^3\}$  ( $\Sigma$  は suspension,  $\{p^1, p^2, p^3\}$  は異なる3点)

[  $P^2(G, c) \equiv S^3$

特に  $k=3$  のときは、 $\bar{R}(3) \ni G$  と  $\forall c: E(G) \rightarrow C_3$  について  $P^2(G, c)$  は閉曲面(2次元多様体)となる。また、 $b_2=3$  の時  $(G, c)$  を frame(2-frame) と呼ぶ。このとき  $b_0 > 2$  なら frame は multi-edge を持たない。

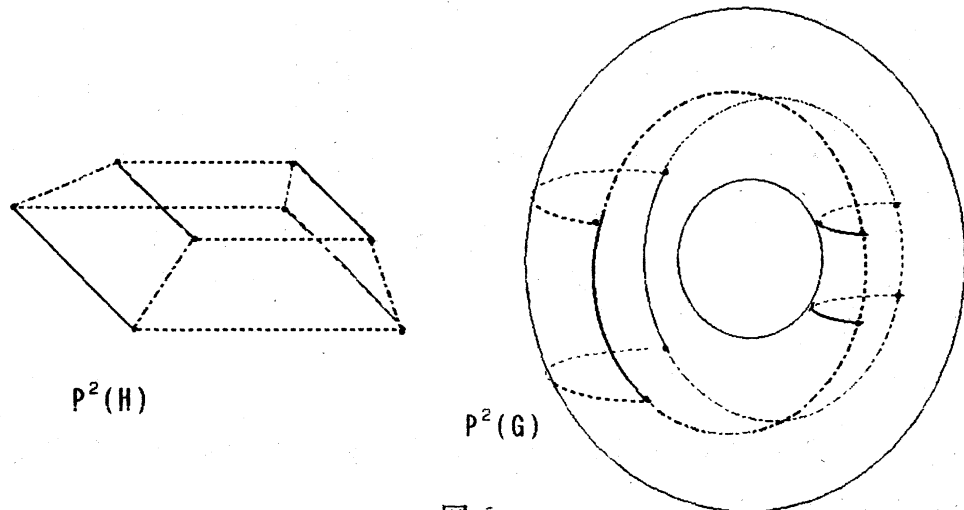


図 6

**Definition 6.** graph  $G_1 = (V_1, E_1), G_2 = (V_2, E_2)$  に対して、

$f: G_1 \rightarrow G_2$  が map である

$\Leftrightarrow$

1.  $f: V_1 \cup E_1 \rightarrow V_2 \cup E_2$  が map で  $f|_{V_1}: V_1 \rightarrow V_2$ ,  $f|_{E_1}: E_1 \rightarrow E_2$  が map,
2.  $f$  が adjacency を保存する ( $e \sim \{u, v\} \rightarrow f(e) \sim \{f(u), f(v)\}$  in  $G_2$ )

**Definition 7.**  $\bar{R}(k) \ni G_j, c_j: E(G_j) \rightarrow C_k$  を edge-colouring とする ( $j=1, 2$ ).

map  $f: G_1 \rightarrow G_2$  が colouring preserving であるとは、

$C_k$  の置換  $\sigma: C_k \rightarrow C_k$  が存在して、 $\sigma C_1 = C_2 f$  のときをいう。

$$\begin{array}{ccc} E(G_1) & \xrightarrow{f} & E(G_2) \\ \downarrow c_1 & & \downarrow c_2 \\ C_k & \xrightarrow{\sigma} & C_k \end{array}$$

**Definition 8.**  $\neg R(k) \ni G$  が colouring-unique (almost colouring-unique)

$\Leftrightarrow$  どんな2つの  $G$  の colourings  $c_1, c_2: E \rightarrow C_k$  に対しても

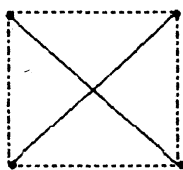
identity map  $i: G \rightarrow G$  が colouring-preserving である。

( $f|_V = i_V$  なる colouring-preserving isomorphism  $f: G \rightarrow G$  が存在する)

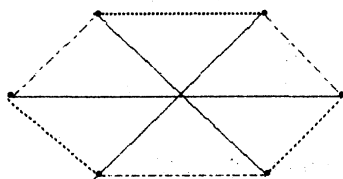
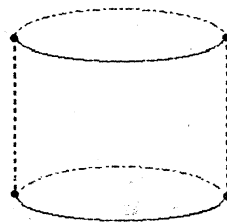
[simple graph に対して almost colouring-unique と colouring-unique とは一致する]



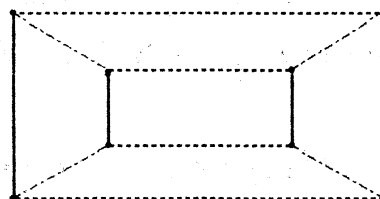
colouring unique



almost colouring unique



colouring admissible



4- and 6-colouring admissible  
( $b_2$ -admissible)

図7

**Definition 9.**  $\neg R(k) \ni G$  のどんな2つの colourings  $c_1, c_2: E \rightarrow C_k$  に対しても colouring-preserving isomorphism  $f: G \rightarrow G$  が存在するとき、 $G$  は colouring-admissible であるという。

**Definition 10.**  $\neg R(k) \ni G$  が  $b_{k-1}$ -admissible ( $k \leq b_{k-1}$ ) であるとは、

$b_{k-1}(G, c_1) = b_{k-1}(G, c_2) = b_{k-1}$  なる edge-colourings  $c_1, c_2: E(G) \rightarrow C_k$  に対して colouring-preserving isomorphism  $f: (G, c_1) \rightarrow (G, c_2)$  が存在する。

**Proposition 3-1.**  $\neg R(3) \ni G$  と edge-colouring  $c: E(G) \rightarrow C_3$  について、  
閉曲面  $P^2(G, c)$  の Euler 標数  $\chi$  は、

$$\chi = b_0 - b_1 + b_2 = b_2 - b_0/2$$

**Proposition 3-2.** 任意の閉曲面  $F$  に対して、 $\neg R(3) \ni G$  と edge-colouring  $c: E(G) \rightarrow C_3$  が存在して  $P^2(G, c) \approx F$ ,  $b_2 = 3$ .

Proof.  $F$  の triangulation から導かれる。

#### § 4. 2 - f r a m e

以下、2次元多様体を表現するグラフの構造を見てゆこう。 $\neg R(3) \ni G$  が与えられれば、閉曲面はとにかく構成できるし、その orientability も決定されている。しかしいままでの例でも見てきたように、colouring によって  $b_2$  は変化するからグラフだけでは多様体は一意には決まらない。

**Proposition 4-1.**  $\neg R(3) \ni G$  が colouring-admissible ならば、

$$P^2(G, c) \approx P^2(G), \text{ すなわちグラフのみによって閉曲面が定まる。}$$

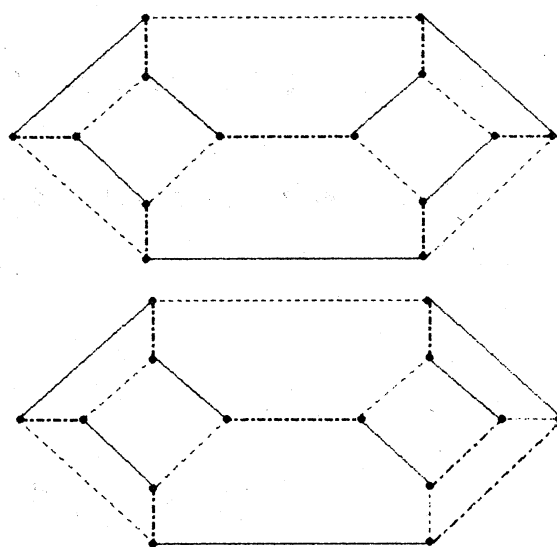
そこで、まず次の問題について考えてみよう。

[問題 1]  $\neg R(3) \ni G$  について、 $P^2(G, c_1) \approx P^2(G, c_2)$  ならば  
 $(G, c_1) \approx (G, c_2)$  (colouring preserving isomorphic) か？

この問題が肯定的に解ければ、多様体を表現するグラフについての  $b_2$ -admissibility という概念が多様体の同相と対応して分かりやすい。



しかし、これには次のような反例がある。



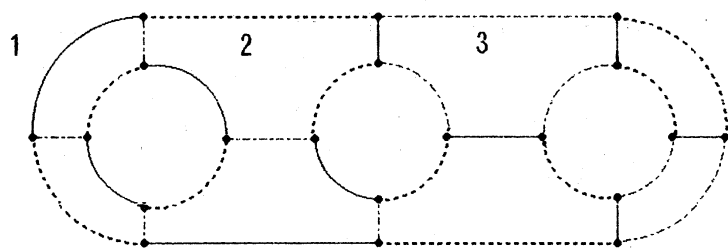
(1-2)-cycles; 3  
(2-3)-cycles; 1  
(3-1)-cycles; 1

$$b_2 = 5$$

$$b_2 = 5$$

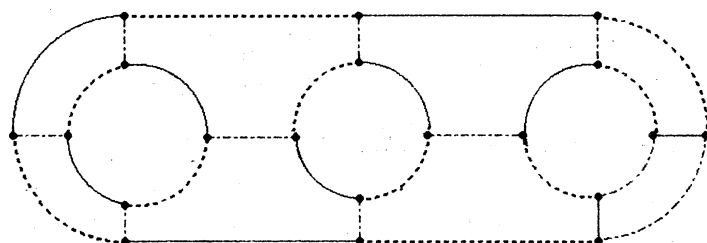
(1-2)-cycles; 2  
(2-3)-cycles; 2  
(3-1)-cycles; 1

図 8 5-admissible でない例



(1-2)-cycles の長さ; 4, 16

(1-2)-cycles = 2, (2-3)-cycles = (3-1)-cycles = 3



(1-2)-cycles の長さ; 10, 10

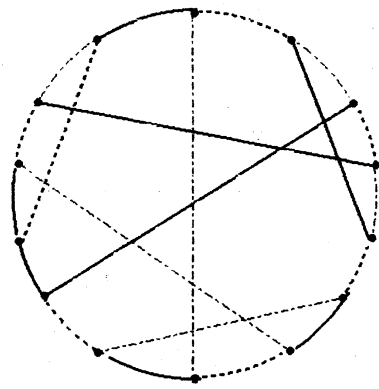
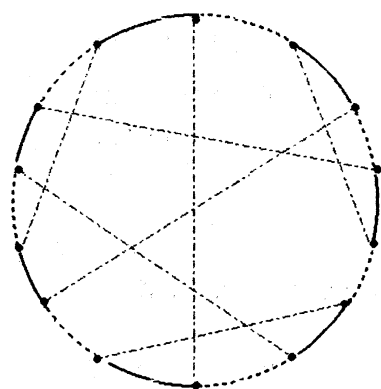
図 9 (i-j)-cycles の数が一致しても同型でない例

この反例では  $b_2 > 3$  なので Proposition 3-2. すなわち対象を frame に制限したときの問題 1 を考える。

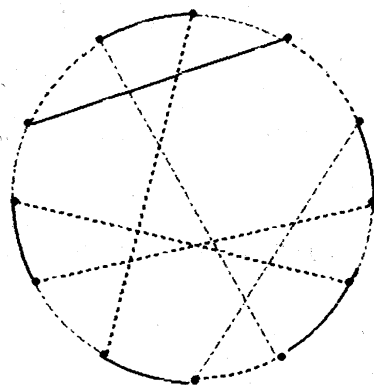
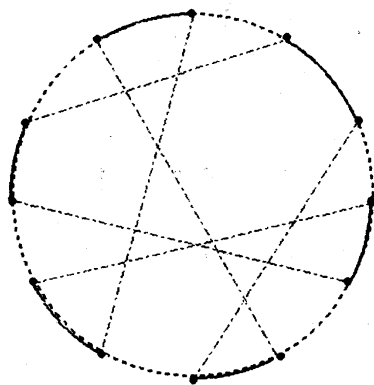
[問題 2]  $\neg R(3) \ni G$  について、

$b_2(G, c_1) = b_2(G, c_2) = 3$  ,  $P^2(G, c_1) \approx P^2(G, c_2)$  ならば  $(G, c_1) \approx (G, c_2)$  ?

これに対しても次のように反例が見つかり、多様体の同相問題を純粹にグラフの範疇で解決することは困難であろう。



non-admissible frame (bipartite)



non-admissible frame (non-bipartite)

図 10

## § 5. 2-frame の reduction.

ここで、グラフの変形とそれに対応する曲面の変化を見ておこう。

## 5-1. Graph の sum

$\neg R(k) \ni G_1, G_2$ , が connected とする,  $c_1: E(G_1) \rightarrow C_k$ ,  $c_2: E(G_2) \rightarrow C_k$   
 $v_1 \in V(G_1), v_2 \in V(G_2)$  として,  $(G_1, c_1)$  と  $(G_2, c_2)$  の  $(v_1, v_2)$  での sum  
 $(G, c) = (G_1 \# G_2, c_1 \# c_2) = (G_1, c_1) \# (G_2, c_2) / (v_1, v_2)$

を、次の図で示されるように定義する。

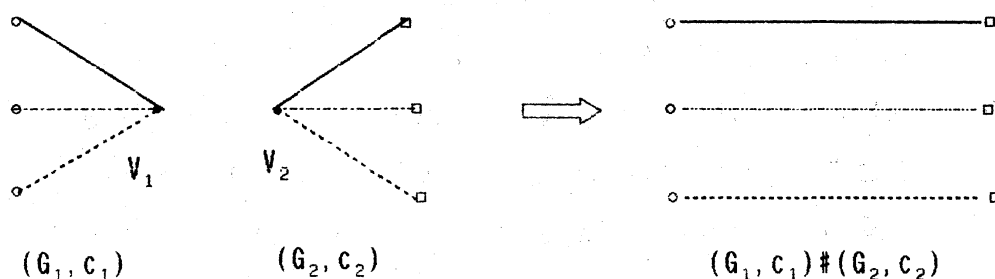


図 1 1

このとき、 $b_p = b_p(G, c)$ ,  $b_{p,q}$  を  $b_p(G_q, c_q)$  ( $q=1, 2$ ) と表わすと、

$$b_0 = b_{01} + b_{02} - 2$$

$$b_j = b_{j1} + b_{j2} - k C_j \quad (0 < j)$$

2次元 ( $k=3$ ) では  $\chi(G_1 \# G_2, c_1 \# c_2) = \chi(G_1, c_1) + \chi(G_2, c_2) - 2$  で、  
 閉曲面の connected-sum に対応している。

2次元では、connected-sum に関して球面・トーラス・射影平面以外は  
 prime (connected-sum に関して分解不可能) でない。しかし上のグラフの  
 sum に関して prime なものでその表現する曲面が prime でないものがある。

## 5-2. Graph の reduction.

ここであげる reduction の 1 つは多様体の同相を超えてグラフ的な関係を  
 重視した強引なものである。

$\neg R(3) \ni G$ , が connected で、 $c: E(G) \rightarrow C_3$  を edge-colouring とする。  
 $G$  をつぎのように (local に) 変形して得られるグラフを  $G' = r(G)$ 、自然に  $c$   
 から得られる  $G'$  の edge-colouring をまた  $c$  と記す。

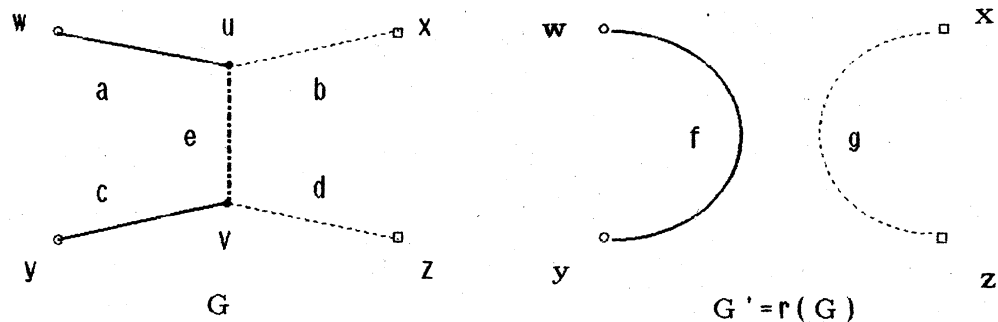


図 1.2

$a: E(G) \rightarrow \{-1, 0, +1\}$  を次のような写像とする。

$E(G) \ni e \sim \{u, v\}$ ,  $c(e)=3$  とするとき、

- 1)  $u$  を通る (1-2)-cycle と  $v$  を通る (1-2)-cycle が異なるとき、 $a(e)=0$ 、
- 2)  $u$  と  $v$  を通る (1-2)-cycle の上で  $u$  と  $v$  の距離が odd のとき、 $a(e)=1$ 、
- 3)  $u$  と  $v$  を通る (1-2)-cycle 上で  $u$  と  $v$  の距離が even のとき、 $a(e)=-1$ 、とする。

**Lemma.** (1)  $(G, c)$  が frame ならば  $a(e) \neq 0$  for any  $e \in E(G)$ ,

(2)  $(G, c)$  が frame で、 $P^2(G, c)$  が orientable  $\Leftrightarrow a(e)=1$  for any  $e \in E(G)$

$P^2(G, c)$  と  $P^2(G', c)$  との関係を見てゆこう。

[case 1 [  $a(e)=0$  のとき ]]

$f$  と  $g$  は同じ (1-2)-cycle 上にあり、 $\chi(G', c) = \chi(G, c) + (-2+3-1) = \chi(G, c)$  で  $P^2(G, c) \approx P^2(G', c)$ 。

[case 2 [  $a(e)=1$ ,  $\#G'=2$  ( $G'$  が disconnected) のとき ]]

$f$  と  $g$  は異なる (1-2)-cycle 上にある。

$\chi(G', c) = \chi(G, c) + (-2+3+1) = \chi(G, c) + 2$ ,  $P^2(G, c) \approx P^2(G_1', c) \# P^2(G_2', c)$ ,  
ただし、 $G_1', G_2'$  は  $G'$  の components.

[case 3 [  $a(e)=1$ ,  $G'$  が connected のとき ]]

$f$  と  $g$  は異なる (1-2)-cycle 上にある。

$\chi(G', c) = \chi(G, c) + (-2+3+1) = \chi(G, c) + 2$ ,  $P^2(G, c) \approx P^2(G', c) \# T^2$

ただし、 $T^2$  はトーラス ( $\approx S^1 \times S^1$ ),

[case 4 [  $a(e) = -1$  のとき ]]

$f$  と  $g$  は同じ (1-2)-cycle 上にあり、

$$\chi(G', c) = \chi(G, c) + (-2 + 3) = \chi(G, c) + 1, \quad P^2(G, c) \approx P^2(G', c) \# P^2$$

ただし、 $P^2$  は 2次元射影平面。

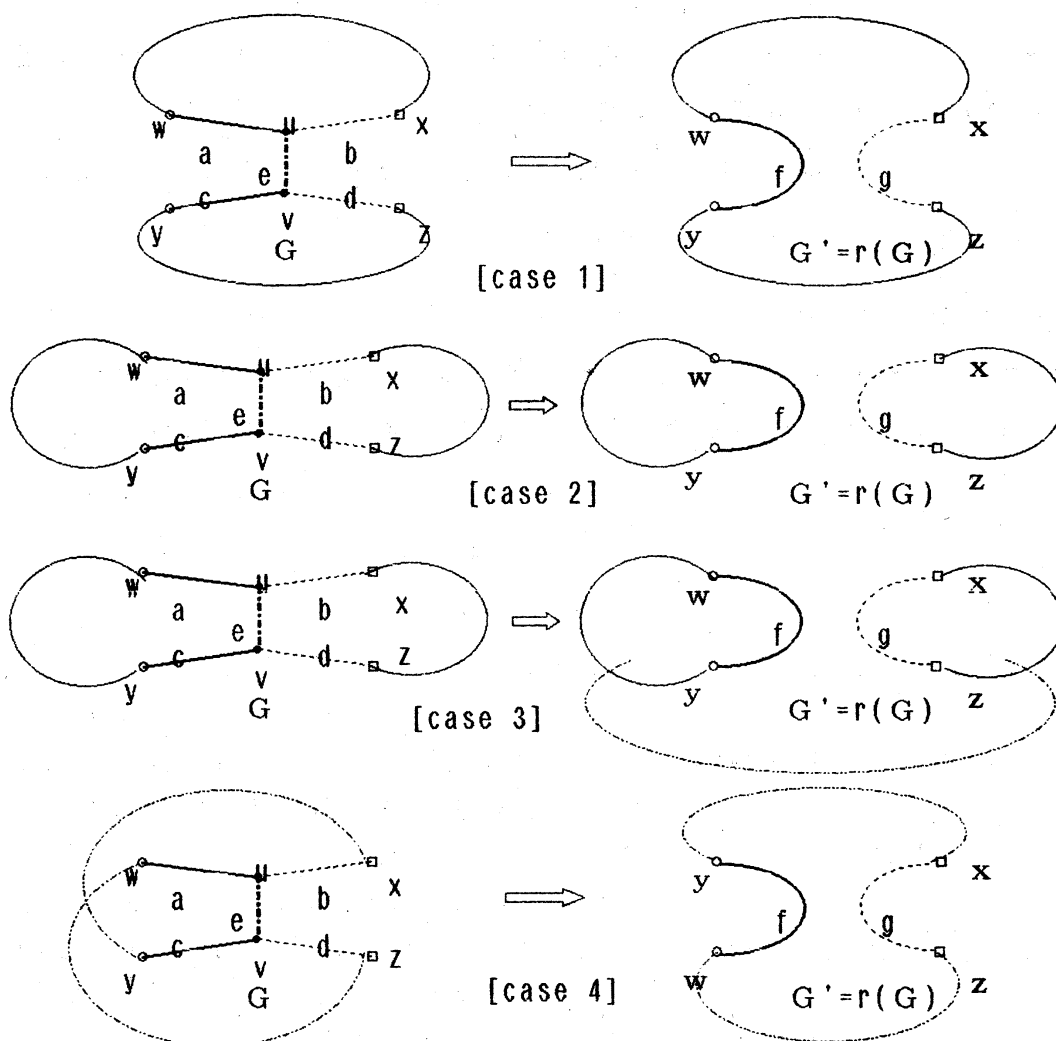


図 13

$(G, c)$  が frame ならば lemma から case 3 or 4 が適用可能である。

case 4 の reduction の結果の  $(r(G), c)$  はまた frame であるが、case 3 の結果では  $b_2 = 4$  でこれに対しては case 1 が適用可能である。そこで、case 3 に対してはつづいて case 1 の reduction を行なうこととすれば

frame に対する reduction の結果は常にまた frame になる。これらの reduction ではいつも graph の order(頂点数)が 2 または 4 ずつ減少するからついには、球面になる。次の予想が正しければ、reduction case 3+1 及びその逆は orientability を保つ関係である。

[ 予想 ] order 6 以上の frame には必ず、 $a(e)=1$  なる edge が存在する。もっと強い次の予想は 2 次元でもまだ良く分からない。

[ [ 予想 ] ] case 1 の逆とそれに続く case 1 の reduction の合成の有限回が多様体の同相の必要十分条件である。

(つまり、同じ order を持つ bipartiteness の等しい 2 つの frames は上の reduction の有限回で移りあえる。)

#### [ REFERENCES について ]

この方面の references がまとまっては見る事が少ないと思われるので、報告者が内容を見ていないものについても、できる限り多くあげておく。

### References

後にあげるリストにないものをここにあげる。

- [ 1 ] 津久井康之 「3-manifold の normal spine と ball covering」  
数理研講究録 524(1984)9-20.
- [ 2 ] 津久井康之 「3-manifolds, spines and graphs」  
数理研講究録 563(1985)84-90.
- [ 3 ] 津久井康之 「On graphs and ball coverings of 3-manifolds」  
数理研講究録 575(1985)17-27.
- [ 4 ] 津久井康之 「辺着色グラフと 3 次元多様体」  
箱根セミナ記録 85(1985)137-144.
- [ 5 ] 津久井康之 「On hoops in induced frames」  
箱根セミナ記録 86(1986)167-186.
- [ 6 ] 津久井康之 「2-frame の uniqueness (1)」  
箱根セミナ記録 87(1989)
- [ 7 ] 津久井康之 「2-frame の uniqueness (2)」  
箱根セミナ記録 88(1989)

## REFERENCES &lt;&lt;FRAME.REF&gt;&gt; (1989.01)

- [ 1] Bandieri P. & Gagliardi C.,  
Generating all orientable  $n$ -manifolds from  $(n-1)$ -complexes,  
Rend. Circ. Mat. Palermo 31(1982)233-246 [84b:57010].
- [ 2] Bandieri P. & Donati A. & Grasselli L.,  
Normal crystallizations of 3-manifolds,  
Geom. Dedicata 14(1983)405-418 [85a:57003].
- [ 3] Bandieri P. & Cavicchioli A. & Grasselli L.,  
Generating all closed 3-manifolds from handlebodies and  
polygonal schemes,  
Colloq. Math. Soc. Janos Bolyai 41(1985)35-56.
- [ 4] Bracho J.,  
Cyclic crystallizations of spheres,  
Manuscripta Math. 55(1986)213-218.
- [ 5] Bracho J. & Montejano L.,  
The combinatorics of colored triangulation of manifolds,  
Geomet. Dedicata 22(1987)303-328.
- [ 6] Casali M.R. & Grasselli L.,  
2-symmetric crystallizations and 2-fold branched coverings  
of  $S^3$ ,  
PP. (1987)1.
- [ 7] Casali M.R. & Grasselli L.,  
Wave moves on crystallizations,  
PP. (1987)1-22.
- [ 8] Casali M.R. & Grasselli L.,  
characterizing crystallizations among Lins-Mandel 4-coloured  
graphs,  
Rend. Circ. Mat. Palermo suppl. 18(1988)221-228.
- [ 9] Cavicchioli A.,  
Pseudo-dissezioni e triangolazione contratte di spazi  
con singolarita isolate,  
Atti Semi. Mat. Fis. Univ. Modena 27(1978)132-150.
- [10] Cavicchioli A.,  
Una rappresentazione delle trivarieta orientabili mediante  
minimali di superficie,  
Atti Sem. Mat. Univ. Modena 29(1980)294-319 [83a:57011]A.
- [11] Cavicchioli A. & Gagliardi C.,  
Crystallizations of PL-manifolds with connected boundary,  
Boll. Un. Mat. Italy B 17(1980)902-917 [85j:57029]A.
- [12] Cavicchioli A. & Grasselli L. & Pezzana M.,  
Su una decomposizione normale per le  $n$ -varieta chiuse,  
Boll. Un. Mat. Italy B 17(1980)1146-1165 [85j:57028]A.

- [13] Cavicchioli A.,  
A new handlebody decomposition of 3-manifolds with  
connected boundary and their fundamental group,  
Boll. Un. Mat. Italy B 18(1981)131-149 [83e:57012]A.
- [14] Cavicchioli A.,  
Remarks on Heegaard splitting theory,  
Boll. Un. Mat. Italy B 18(1981)961-975 [83h:57014].
- [15] Cavicchioli A.,  
A three-manifold invariant independent of the homotopy type,  
Boll. Un. Mat. Italy D 1(1982)215-227 [84g:57014].
- [16] Cavicchioli A. & Grasselli L.,  
Contracted triangulations as branched coverings,  
Atti Semi. Mat. Fis. Univ. Modena 33(1984)241-246.
- [17] Cavicchioli A.,  
A genus for n-dimensional knots and links,  
Collect. Math. 36(1985)229-242.
- [18] Cavicchioli A.,  
Lins-Mandel crystallizations,  
Discrete Math. 57(1985)17-35.
- [19] Cavicchioli A. & Grasselli L.,  
Minimal atlases of manifolds,  
Cahiers Top. Geom. Diff. 26(1985)389-397.
- [20] Cavicchioli A.,  
Lins-Mandel 3-manifolds and their groups : a simple proof  
of the homology sphere conjecture,  
Rend. Circ. Mat. Palermo Suppl. 18(1988)229-237.
- [21] Chiavacci R.,  
Pseudocomplessi colorati e loro gruppi fondamentali,  
PP. (1986)1-29.
- [22] Chiavacci R. & Pareschi G.,  
Some bounds for the regular genus of PL-manifolds,  
PP. (1986)22.
- [23] Costa A.F. & Val-Melu's P.,  
Crystallizations and permutations representing 3-manifolds,  
Boll. U.M. Italia B 1(1987)477-490.
- [24] Donati A.,  
/A class of 4-pseudomanifolds similar to the lins spaces,  
Aequationes Math. ().



<<FRAME.REF>> (1989.01) file volume : 83

- [25] Donati A. & Grasselli L.,  
Gruppo dei colori e cristallizzazioni normali degli spazi  
lenticolare,  
Boll. Un. Mat. Italy A 1(1982)359-366.
- [26] Donati A.,  
/A calculation method of 3-manifolds fundamental group,  
J. Combin. Information System Sci. 8(1983)97-100.
- [27] Donati A.,  
Lins-Mandel manifolds as branched coverings of  $S^3$ ,  
Discrete Math. 62(1986)21-27.
- [28] Donati A. & Ferri M.,  
/A note on groups and permutation-partition pairs,  
PP.
- [29] Ferri M. & Garliardi C.,  
Alcune proprietà caratteristiche delle triangolazioni contratte,  
Atti Semi. Mat. Fis. Univ. Modena 24(1975)195-220.
- [30] Ferri M.,  
Una rappresentazione delle n-varietà topologiche triangolabili  
mediante grfi (n+1)-colorati,  
Boll. Un. Mat. Italy B 13(1976)250-260.
- [31] Ferri M.,  
Crystallizations of 2-fold branched coverings of  $S^3$ ,  
Proc. AMS. 73(1979)271-276.
- [32] Ferri M. & Gagliardi C.,  
Strong ball coverings of manifolds,  
Atti. Semi. Mat. Fis. Univ. Modena 28(1979)289-293 [82h:57016].
- [33] Ferri M. & Gagliardi C.,  
On the genus of 4-dimensional products of manifolds,  
Geom. Dedicata 13(1982)331-345 [84m:57010].
- [34] Ferri M. & Gagliardi C.,  
Crystallization moves,  
Pacific J. Math. 100(1982)85-103 [83i:57011]A.
- [35] Ferri M. & Gagliardi C.,  
The only genus zero n-manifold is  $S^n$ ,  
Proc. AMS. 85(1982)638-642 [84e:57017].
- [36] Ferri M. & Gagliardi C.,  
A characterization of punctured n-spheres,  
Yokohama Math. J. 33(1985)29-38.

<<FRAME.REF>> (1989.01) file volume : 83

- [37] Ferri M. & Gagliardi C. & Grasselli L.,  
A graph-theoretic representation of PL-manifolds - a  
survey on crystallizations,  
Aequationes Math. 31(1986)121-141.
- [38] Ferri M. & Lins S.,  
/Topological aspects of edge fusions in 4-graphs,  
TA. (1986)1-.
- [39] Ferri M.,  
Colour switchings and homeomorphism of manifolds,  
Can. J. Math. 39(1987)8-32.
- [40] Ferri M. & Gagliardi C.,  
Multiple residues in dimension three,  
J. Combin. Theory B 44(1988)263-275.
- [41] Gagliardi C.,  
Spezzamenti alla Heegaard per varietà n-dimensionali,  
Boll. Un. Mat. Italy A 13(1976)302-311.
- [42] Gagliardi C.,  
A combinatorial characterization of 3-manifold crystallizations,  
Boll. Un. Mat. Italy A 16(1979)441-449 [81a:57003].
- [43] Gagliardi C.,  
/How to deduce the fundamental group of a closed n-manifold  
from a contracted triangulation,  
J. Comb. Inf. Syst. Sci. 4(1979)237-252 [81m:57014].
- [44] Gagliardi C.,  
Regular imbeddings of edge-coloured graphs,  
Geom. Dedicata 11(1981)397-414 [83g:05032].
- [45] Gagliardi C.,  
Extending the concept of genus to dimension n,  
Proc. AMS. 81(1981)473-481 [82a:57004].
- [46] Gagliardi C.,  
Recognizing a 3-dimensional handle among 4-coloured graphs,  
Ricerche Mat. 31(1982)389-404 [84m:57008].
- [47] Gagliardi C.,  
Cobordant crystallizations,  
Discrete Math. 45(1983)67-73 [85c:57017].
- [48] Gagliardi C.,  
On the genus of  $CP^2$ ,  
PP. (1986)1-.

<<FRAME.REF>> (1989.01) file volume : 83

- [49] Gagliardi C.,  
/Regular genus - the boundary case,  
Geometriae Dedicata 22(1987)261-281.
- [50] Gagliardi C. & Volzone G.,  
Handles in graphs and sphere bundles over  $S^1$ ,  
Europ. J. Combin. 8(1987)151-158.
- [51] Grasselli L.,  
/Edge-coloured graphs and associated groups,  
Rend. Circ. Mat. Palermo ().
- [52] Grasselli L.,  
A geometric description of normal crystallizations,  
J. Geometry 24(1985)36-47 [86i:57003].
- [53] Grasselli L.,  
Simple contractible complexes are nonshellable,  
TA. (1986)1-.
- [54] Grasselli L.,  
/3-manifold spines and bijoins,  
PP.
- [55] Grasselli L.,  
/Multiple-coloured graphs and pseudocomplexes,  
PP.
- [56] Ikeda H.,  
Note on the 4-manifolds in  $C(p,2)$  with  $p \geq 1$ ,  
Math. Semi. Notes 6(1978)527-530.
- [57] Ikeda H. & Yamashita M.,  
Closed 4-manifolds covered by three 4-balls,  
Yokohama Math. J. 26(1978)109-117.
- [58] Kobayashi K. & Tsukui Y.,  
The ball coverings of manifolds,  
J. Math. Soc. Japan 28(1976)133-143.
- [59] Lins S.,  
A sequence representation for maps,  
Discrete Math. 30(1980)249-263.
- [60] Lins S.,  
Graph-encoded maps,  
J. Comb. Theory B 32(1982)171-181.

- [61] Lins S.,  
Towards a catalogue of 3-manifold ctystallizations I.  
construction of 3-connected bicubic graphs in the 2-sphere,  
Atti Semi. Mat. Fis. Univ. Modena 33(1984)369-377.
- [62] Lins S.,  
A simple proof of Gagliardi's handle recognition theorem,  
Discrete Math. 57(1985)253-260.
- [63] Lins S. & Mandel A.,  
Graph-encoded 3-manifolds,  
Discrete Math. 57(1985)261-284.
- [64] Lins S.,  
Paintings: a planar approach to higher dimensions,  
Geom. Dedicata 20(1986)1-25.
- [65] Lins S.,  
/Invariant groups on equivalent crystallizations,  
TA. (1986)1-.
- [66] Lins S.,  
On the fundamental group of 3-gems and a 'planar' class of  
3-manifolds,  
Europ. J. Combin. 9(1988)291-305.
- [67] Little C.H.C.,  
Cubic combinatorial maps,  
J. Combin. Theory B 44(1988)44-63.
- [68] Paris G. & Volzone G.,  
Omologia di grafi colorati sugli spigoli,  
Atti Sem. Mat. Fis. Univ. Modena 32(1983)217-231.
- [69] Pezzana M.,  
Atlanti minimali di varieta differenziabili compatte,  
Boll. Un. Mat. Italy 6(1968)749-752.
- [70] Pezzana M.,  
Sulla struttura topologica delle varieta compatte,  
Atti Sem. Mat. Fis. Univ. Modena 23(1974)269-277 [53#6606].
- [71] Pezzana M.,  
Compattificazione di  $R^n$  e varieta topologiche compatte  
triangolabili,  
Atti Sem. Mat. Fis. Univ. Modena 23(1974)278-285.
- [72] Pezzana M.,  
Diagrammi di Heegaard e triangolazione contrartta,  
Boll. Un. Mat. Italy 12 Suppl. fasc. 3(1975)98-105.

<<FRAME.REF>> (1989.01) file volume : 83

- [73] Tsukui Y.,  
On ball coverings for products of manifolds,  
Yokohama Math. J. 25(1977)113-117.
- [74] Tsukui Y.,  
On handle free 3-manifolds,  
'Topology and Computer Science'KNKY (1986)61-80.
- [75] Vince A.,  
Graphic matroids, shellability and the Poincare conjecture,  
Geom. Dedicata 14(1983)303-314.
- [76] Vince A.,  
Regular combinatorial maps,  
J. Comb. Theory B 35(1983)256-277 [85i:05129].
- [77] Vince A.,  
Combinatorial maps,  
J. Comb. theory B 34(1983)1-21.
- [78] Vince A.,  
Combinatorial crassification of the regular polytopes,  
'Progress in graph thory'ACD (1984)487-496.
- [79] Vince A.,  
A non-shellable 3-sphere,  
Europ. J. Comb. 6(1985)91-100.
- [80] Vince A.,  
Recognizing the 3-sphere,  
PP. (1986)1-26.
- [81] Vince A.,  
n-graphs,  
PP. (1986)1-25.
- [82] Volzone G.,  
Alcune osservazioni sul riconoscimento di  $S^1 \times S^2$ ,  
Atti Sem. Fis. Univ. Modena 31(1982)228-247.
- [83] Yamashita M. & Ikeda H.,  
4-manifolds of covering number 2,  
Math. Semi. Notes 4(1976)105-111.

## REFERENCES &lt;&lt;DSDIAGRM.REF&gt;&gt; (1989.01)

- [ 1] Ikeda H.,  
Acyclic fake surfaces,  
Topology 10(1971)9-36.
- [ 2] Ikeda H.,  
Acyclic fake surfaces which are spines of 3-manifolds,  
Osaka J. Math. 9(1972)391-408.
- [ 3] Ikeda H.,  
Non-contractible acyclic normal spines,  
Osaka J. Math. 10(1973)511-520.
- [ 4] Ikeda H.,  
Orientable 3-manifolds as singular block bundles,  
Yokohama Math. J. 22(1974)141-149.
- [ 5] Ikeda H.,  
Singular block bundles,  
Yokohama Math. J. 22(1974)79-100.
- [ 6] Ikeda H.,  
Fake surfaces which are spines of 3-manifolds,  
Yokohama Math. J. 23(1975)55-61.
- [ 7] Ikeda H. & Yamashita M.,  
Mapping cylinders and manifolds,  
Math. Semi. Notes 7(1979)647-656.
- [ 8] Ikeda H.,  
Acyclic 3-manifolds without closed chain,  
Math. Semi. Notes 9(1981)25-57.
- [ 9] Ikeda H. & Yamashita M.,  
The collapsing maps of simplicial collapsings,  
Math. Semi. Notes 9(1981)269-313.
- [10] Ikeda H.,  
Finding simpler spines for acyclic 3-manifolds,  
Math. Seminar Notes 10(1982)57-68.
- [11] Ikeda H. & Yamashita M.,  
Note on the collapsing maps,  
Math. Seminar Notes 10(1982)345-349.
- [12] Ikeda H.,  
Contractible 3-manifolds admitting normal spines with  
maximal elements,  
Kobe J. Math. 1(1984)57-66.

<<DSDIAGRM.REF>> (1989.01) file volume : 21

- [13] Ikeda H.,  
Identification map on the 2-sphere,  
Kobe J. Math. 2(1985)163-167.
- [14] Ikeda H. & Inoue Y.,  
Invitation to DS-diagrams,  
Kobe J. Math. 2(1985)169-186.
- [15] Ikeda H.,  
DS-diagrams with E-cycle,  
Kobe J. Math. 3(1986)103-112.
- [16] Ikeda H.,  
The diversion of DS-diagrams,  
PP. (1987)1-20.
- [17] Ikeda H. & Yamashita M. & Yokoyama K.,  
Deformations of DS-diagrams,  
NH. (1987)1-57.
- [18] Ishii I.,  
Flows and spines,  
Tokyo J. Math. 9(1986)505-525.
- [19] Ishii I.,  
Combinatorial construction of a non-singular flow on a  
3-manifold,  
Kobe J. Math. 4(1987)1-10.
- [20] Ishii I.,  
Flow-spines and Seifert fibred structure of 3-manifolds,  
Tokyo J. Math. 11(1988)95-104.
- [21] Yamashita M.,  
D%1%-deformation of DS-diagram,  
PP. (1987)1-10.